

ΜΑΘΗΜΑ 17**1.4 – 1.5 ΟΡΙΟ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΟ $x_0 \in \mathbb{R}$** **Τριγωνομετρικά όρια****Αλλαγή μεταβλητής****ΑΣΚΗΣΕΙΣ****Τριγωνομετρικά όρια.****Θυμόμαστε** • τριγωνομετρικές ταυτότητες

• Συζυγής παράσταση

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0, \quad (|\eta\mu x| \leq |x|)$$

1.Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x + \eta\mu 3x}{x}$ **Προτεινόμενη λύση.**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x + \eta\mu 3x}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu 2x}{x} + \frac{\eta\mu 3x}{x} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{x} + \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{x} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} + 3 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} \\ &= 2 \lim_{2x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x}{2x} + 3 \lim_{3x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 3x}{3x} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 = 5 \end{aligned}$$

2.Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu 2x + \eta\mu 3x - \eta\mu 4x}{2x}$ **Υπόδειξη** Ακολουθήστε την άσκηση 1.

3.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x - 1}{x^2}$

Προτεινόμενη λύση.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu 2x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - 2\eta\mu^2 x - 1}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2\eta\mu^2 x}{x^2} \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu x}{x} \right)^2 = -2 \cdot 1^2 = -2 \end{aligned}$$

4.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{x^2}$

Προτεινόμενη λύση.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sigma\upsilon\nu x - 1)(\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1)}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1 - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2} - 1}{x^2} (\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1) \right] \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu^2 \frac{x}{2}}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1) \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{x} \right)^2 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1) \quad (1) \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{\eta\mu \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} (\sigma\upsilon\nu^2 x + \sigma\upsilon\nu x + 1) = \sigma\upsilon\nu^2 0 + \sigma\upsilon\nu 0 + 1 = 1 + 1 + 1 = 3$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma\upsilon\nu^3 x - 1}{x^2} = -2 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = -\frac{3}{2}$$

5.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^v x - 1}{x^2}$, όπου $v \in \mathbb{N}^*$

Υπόδειξη.

Άσκηση 4.

6.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - \eta \mu x} - 2}{x}$

Προτεινόμενη λύση.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 - \eta \mu x} - 2}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{4 - \eta \mu x} - 2)(\sqrt{4 - \eta \mu x} + 2)}{x(\sqrt{4 - \eta \mu x} + 2)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 - \eta \mu x - 4}{x(\sqrt{4 - \eta \mu x} + 2)} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x(\sqrt{4 - \eta \mu x} + 2)} \\
 &= - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu x}{x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4 - \eta \mu x} + 2} \\
 &= -1 \cdot \frac{1}{\sqrt{4 - \eta \mu 0} + 2} = -1 \cdot \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

7.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\varepsilon\phi x - \eta\mu x}$

Προτεινόμενη λύση.

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\varepsilon\phi x - \eta\mu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} - \eta\mu x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\eta\mu x \left(\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} - 1 \right)} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\eta\mu x \frac{1 - \sigma\upsilon\nu x}{\sigma\upsilon\nu x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sigma\upsilon\nu x}{\eta\mu x (1 - \sigma\upsilon\nu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x}{\eta\mu x} \cdot \frac{x^2}{1 - \sigma\upsilon\nu x} \cdot \sigma\upsilon\nu x \right] \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x}} = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sigma\upsilon\nu x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - (1 - 2\eta\mu^2 \frac{x}{2})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2\eta\mu^2 \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \left(\frac{x}{2} \right)^2}{\eta\mu^2 \frac{x}{2}} \\
 &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\frac{x}{2}}{\eta\mu \frac{x}{2}} \right)^2 \\
 &= 2 \left(\lim_{\frac{x}{2} \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{2}}{\eta\mu \frac{x}{2}} \right)^2 = 2 \cdot 1^2 = 2
 \end{aligned}$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\varepsilon\phi x - \eta\mu x} = 1 \cdot 2 \cdot 1 = 2$$

8.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\varepsilon\varphi\pi x}{x+2}$

Προτεινόμενη λύση.

Θέτουμε $h = x + 2$, οπότε $x = -2 + h$ και $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\varepsilon\varphi\pi x}{x+2} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi[\pi(-2+h)]}{-2+h+2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(-2\pi + \pi h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\pi h)}{h} = \pi \lim_{\pi h \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi(\pi h)}{\pi h} \stackrel{*}{=} \pi \cdot 1 = \pi \end{aligned}$$

$$* \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\varepsilon\varphi x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x \sigma\upsilon\nu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x} = 1 \cdot \frac{1}{\sigma\upsilon\nu 0} = 1 \cdot \frac{1}{1} = 1$$

9.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(5\pi x)}{\eta\mu(\pi x)}$

Προτεινόμενη λύση.

Θέτουμε $x = 1 + h$, οπότε $h \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(5\pi x)}{\eta\mu(\pi x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu[5\pi(1+h)]}{\eta\mu[\pi(1+h)]} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(5\pi + 5\pi h)}{\eta\mu(\pi + \pi h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi + 5\pi h)}{\eta\mu(\pi + \pi h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\eta\mu(5\pi h)}{-\eta\mu(\pi h)} \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{5\pi h \frac{\eta\mu(5\pi h)}{5\pi h}}{\pi h \frac{\eta\mu(\pi h)}{\pi h}} \\
 &= 5 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{\eta\mu(5\pi h)}{5\pi h}}{\frac{\eta\mu(\pi h)}{\pi h}} = 5 \frac{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(5\pi h)}{5\pi h}}{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi h)}{\pi h}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

$$\text{Αλλά } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(5\pi h)}{5\pi h} = \lim_{5\pi h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(5\pi h)}{5\pi h} = 1$$

$$\text{και } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi h)}{\pi h} = \lim_{\pi h \rightarrow 0} \frac{\eta\mu(\pi h)}{\pi h} = 1$$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(5\pi x)}{\eta\mu(\pi x)} = 5 \cdot \frac{1}{1} = 5$$

10.

Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x^2}{\eta\mu(\pi x)}$

Υπόδειξη. $\frac{1-x^2}{\eta\mu(\pi x)} = \frac{1-x}{\eta\mu(\pi x)} (1+x)$ και ακολουθήστε την άσκηση 8.

11.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{f(x)}$

Υπόδειξη. $\frac{\eta\mu(\pi x)}{f(x)} = \frac{\eta\mu(\pi x)}{\frac{x-1}{\frac{f(x)}{x-1}}}$ και ακολουθήσε την άσκηση 8.

12.

Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-2}{x-1} = 4$, να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\eta\mu(\pi x)}{f(x)-2}$

Υπόδειξη. Ακολουθήσε την άσκηση 11.

Αλλαγή μεταβλητής

13.

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι περιττή και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = -\ell$.

Προτεινόμενη λύση.

f περιττή $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Δίνεται $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Όπου x θέτουμε $-u$ και έχουμε

$$\begin{aligned} \lim_{u \rightarrow -x_0} f(-u) &= \ell \\ \lim_{u \rightarrow -x_0} [-f(u)] &= \ell \\ - \lim_{u \rightarrow -x_0} f(u) &= \ell \\ \lim_{u \rightarrow -x_0} f(u) &= -\ell \\ \lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) &= -\ell. \end{aligned}$$

όπου u θέτουμε x , οπότε

14.

Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι άρτια και $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$.

Να αποδείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -x_0} f(x) = \ell$.

Υπόδειξη : Άσκηση 13

15.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = 1$.

Να υπολογίσετε το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 - x}$, εφόσον υπάρχει.

Προτεινόμενη λύση.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x^2 + x)}{x^2 + x}}{\frac{x^2 - x}{x^2 + x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 + x}}{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x}} \quad (1)$$

Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 + x}$ όπου $x^2 + x$ θέτουμε u : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 + x} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} = 1$.

Για το $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x}$ έχουμε $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-1)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-1}{x+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1$

$$(1) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x^2 + x)}{x^2 - x} = \frac{1}{-1} = -1$$

16.

Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$ με $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(4-x)}{f(x)} = \ell > 0$. Να βρείτε το ℓ .

Προτεινόμενη λύση.

Όπου $4 - x$ θέτουμε u , οπότε $u \rightarrow 4 - 2 = 2$ και η υπόθεση γίνεται

$$\lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(u)}{f(4-u)} = \ell \Rightarrow \lim_{u \rightarrow 2} \frac{f(4-u)}{f(u)} = \frac{1}{\ell}$$

$$\ell = \frac{1}{\ell} \Rightarrow \ell^2 = 1 \Rightarrow \ell = 1$$